工程数值仿真与CAE算法
Numerical Simulation of Engineering and CAE Algorithm

文章编号:1006-0871(2016)02-0001-04
DOI:10.13340/j.cae.2016.02.001

# 位移法浅水波方程的解及其特性

姚征[1]， 钟万勰[2]

（1. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院，辽宁 大连 116026；
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室；工程力学系，辽宁 大连 116023）

**摘要**：不同于传统流体力学，在Lagrange坐标下推导浅水波方程．若将水平位移作为基本变量，则推导出的浅水波数学模型可描述为固体力学的非线性大位移问题．运用不可压缩条件，通过变分原理推导出位移法浅水波方程，给出椭圆函数形式的行波解，并分析孤波解产生的条件．该基础研究建立了在分析结构力学中分析浅水波问题的理论基础，有利于进一步开展水动力学的研究．

**关键词**：浅水波；Lagrange坐标；孤立波；椭圆函数；微分代数方程；保辛；分析结构力学
**中图分类号**：O353.2 **文献标志码**：A

# Solutions and characteristics of shallow water equation based on displacement method

YAO Zheng[1], ZHONG Wanxie[2]

(1. Transportation Equipment and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, Liaoning, China; 2. State Key Laboratory of Structural Analysis and Industrial Equipment; Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, Liaoning, China)

**Abstract**: The shallow water wave equation is obtained in Lagrange coordinates, which is different from the traditional hydrodynamics. The horizontal displacement is defined as the basic variable, and the deduced mathematical model of shallow water wave just likes the nonlinear large displacement problem in solid mechanics. Under the incompressible condition, the variational principle for shallow water dynamic equation is given on the basis of the displacement method, and the corresponding elliptic traveling wave solutions are presented the conditions of obtaining solitary wave solutions are also discussed. As a basic research work, the present study establishes the theoretical foundation of analyzing the shallow water waves in analytical structural mechanics and is valuable for the further research in hydrodynamics.

**Key words**: shallow water wave; Lagrange coordinate; solitary wave; elliptic function; differential-algebraic equation; symplectic constraint; analytical structural mechanics



---

**收稿日期**：2015-12-23 **修回日期**：2016-01-12
**基金项目**：国家自然科学基金(11202040)；中央高校基本科研业务专项资金(3132015100)
**作者简介**：姚征(1978—)，男，河北石家庄人，副教授，博士，研究方向为计算固体力学，(E-mail)yaozheng@dlmu.edu.cn；
钟万勰(1934—)，男，浙江德清人，中国科学院院士，教授，博导，研究方向为应用力学，(E-mail)wxzhong@dlut.edu.cn

## 0 引 言

中国沿海有广阔的大陆架及浅海区,面积较小的渤海平均水深只有 25 m,主要由浅海构成,但现阶段中国总体海洋开发程度和利用率都很低. 发展中国的海洋事业就需要进行浅海的开发研究. 浅海的波浪直接影响渔业、运输和勘探作业等. 因为浅海几十米的深度相对于广阔的海洋延伸尺度而言是很小的,所以其波动主要以浅水波为主. 因此,对浅水波进行理论研究与分析对中国近海作业的发展有很大的推动作用.

对浅水波理论和方程[1-3]的研究历史悠久,但主要是在 Euler 坐标系下进行研究,其中著名的 KdV 浅水波方程就是在 Euler 坐标系下推导出的. 浅水波的速度分布与水深无关,表面位移也与水深无关,这正满足杆件的刚性横截面假定. 在 Lagrange 坐标系下,利用位移法可以推导出一套与传统的浅水波 KdV 方程完全不同的浅水波方程. 于是,分析力学的变分原理即可运用正则变换、近似解的保辛积分等有效手段使数值求解得到很多方便.

## 1 KdV 方程及其行波解

1895 年 KORTEWEG 和 de VRIES 研究浅水波的运动,在长波近似和小振幅的假定下,单向运动的浅水波运动方程[4-5]为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_0\eta + \frac{3}{4}\frac{c_0}{h}\eta^2 + \frac{1}{6}c_0h^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{1}$$

式中:$\eta$ 为波峰高度;$h$ 为水深;$c_0 = \sqrt{gh}$,$g$ 为重力加速度. 式(1)即为描述浅水波无损传播的 KdV 方程,其可化为标准形式的 KdV 方程

$$u_\tau + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

式中:$\tau = c_0h^2t/6$;$\alpha = 9/h^3$. KdV 方程的标准形式存在多种表达方法,彼此间可通过简单的变换相互转化. 下面推导 KdV 方程的行波解. 令 $\xi = x - V_K t$,式(2)可化为

$$V_K u' + \alpha u u' + u''' = 0 \tag{3}$$

将式(3)积分一次,乘以 $u'$ 再积分一次可得

$$\frac{(u')^2}{2} = \frac{\alpha}{6}u^3 + \frac{V_K}{2}u^2 + A\xi + B = F(u) \tag{4}$$

式中:$A$,$B$ 为积分常数. 设 $F(u)$ 有 3 个实零点 $u_1$,$u_2$ 和 $u_3$,且 $u_1 > u_2 > u_3$,则可推导出 KdV 方程的椭圆余弦波解[6]为

$$u = u_2 - (u_2 - u_3)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{u_1 - u_3}{2}}(\xi - \xi_3), k\right) \tag{5}$$

式中:$k^2 = \dfrac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}$ 为二阶 Jacobi 椭圆函数的模数;$\xi_3$ 为待定积分常数. KdV 方程存在孤波解,即当 $\xi = x - V_K t \to \pm\infty$ 时 $u(\xi) \to 0$ 的解. 通过推导可以得到 KdV 方程的孤波解的形式[5,7]为

$$\eta_{\mathrm{KdV}} = \eta_0 \mathrm{sech}^2\left(\sqrt{3\eta_0/4h^3}(x - V_K t)\right) \tag{6}$$

式中:$\eta_0$ 为波幅;波速满足 $V_K^2 = gh(1 + \eta_0/2h)^2$.

## 2 Lagrange 坐标下的浅水波方程

考虑二维浅水波,$z$ 向水深 $h$ 比较小,而 $x$ 向长度 $L$ 比较大. 水底 $z = -h$ 处 $w = 0$,水面 $z = \eta(x,t)$,见图 1. 用 $q(X,t)$ 代表初始 $t_0$ 时刻在 $X$ 处的质点在时间 $t$ 时刻的水平位移. 这表示沿水的深度方向 $q(X,t)$ 相同,即是杆件的刚性横截面假定. 原来在 $(X,Z)$ 处的质点,在 $t$ 时刻的坐标为 $(x,z)$,位移关系满足

$$\begin{cases} x = X + q(X,t) \\ z = Z + w(X,Z,t) \end{cases} \tag{7}$$

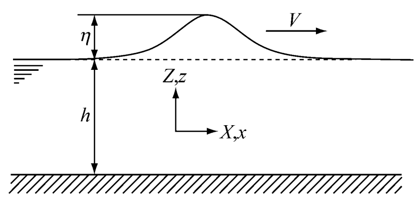


图 1 二维浅水波

Fig. 1 2D shallow water wave

$t_0$ 时刻在 $X + \Delta X$ 处的质点在 $t$ 时刻的坐标为 $q(X + \Delta X, t) + X + \Delta X$. 两点之间的距离为

$$\begin{cases} \Delta X + (q(X + \Delta X, t) - q(X,t)) \approx (1 + \varepsilon_X)\cdot\Delta X \\ \varepsilon_X = \partial q(X,t)/\partial X = q_X \end{cases} \tag{8}$$

据此可运用不可压缩条件计算水面. 原来的水面位于 $z = 0$,单位宽度水深 $h$,长度 $\Delta X$ 的体积为 $h\cdot\Delta X$;现在长度成为 $(1 + q_X)\cdot\Delta X$,水深为 $h + \eta$. 由于浅水中水的密度变化可以忽略不计,由连续性条件

$$(h + \eta)\cdot(1 + q_X)\cdot\Delta X = h\cdot\Delta X \tag{9}$$

得

$$\begin{cases} (h + \eta) = h/(1 + q_X) \\ \eta = -hq_X/(1 + q_X) \end{cases} \tag{10}$$

从而水面可用位移 $q(X,t)$ 表达,可减少一个未知函数. 从固体力学的角度来看,属于泊松比等于0.5的情况. 但应当指出,该水面高度不是在原先 $X$ 坐标处的,而是在位移后 $q(X,t) + X$ 处的水面高. 这是固体力学的非线性大位移问题.

Lagrange 函数是动能-势能函数. 设水波单位长

度的质量为 $\tilde{\rho}=\rho_0(\eta+h)$,速度为 $\dot{q}$,则水平速度的动能为

$$T_1=\int_0^L\frac{1}{2}\rho_0(h+\eta)\dot{q}^2\mathrm{d}x=\int_0^L\frac{1}{2}\rho_0 h\dot{q}^2\mathrm{d}X \tag{11}$$

动能是位移 $q(X,t)$ 的泛函. 虽然水面会变化,但位移后的微元长度也变化,故其动能仍为式(11). 垂直方向速度相对较小,其动能为

$$T_2=\int_0^L\rho_0(h^3/6)(\dot{q}_X/(1+q_X)^2)^2\mathrm{d}X\approx\int_0^L\rho_0(h^3/6)\dot{q}_X^2\mathrm{d}X \tag{12}$$

因 $T_2$ 本身很小,故可以进行一些合理近似简化,于是总动能

$$T=T_1+T_2=\int_0^L\frac{1}{2}\rho_0 h(\dot{q}^2+h^2\dot{q}_X^2/3)\mathrm{d}X \tag{13}$$

势能由重力产生,以水面为势能的零点,通过推导可计算出势能

$$U=-\frac{1}{2}\rho_0 gh^2L+\frac{1}{2}\rho_0 gh^2\int_0^L q_X^2(1-q_X+q_X^2-\cdots)\mathrm{d}X \tag{14}$$

势能仍是位移 $q(X,t)$ 的泛函. 该问题如同杆件结构力学的振动,只是势能的算式是非线性的. Lagrange 函数为 $L(q,\dot{q})=T-U$. 注意,$U$ 中的常数是不起作用的. 变分给出非线性方程

$$\ddot{q}(X,t)-\ddot{q}_{XX}h^2/3-gh(q_{XX}-3q_Xq_{XX})=0 \tag{15}$$

式(15)即为位移法的浅水波方程,其求解只能用数值方法[8]. 求式(15)的行波解,令 $\xi=X-Vt$,波速 $V$ 待求,故 $q(X,t)=f(X-Vt)=f(\xi)$,$q_X(X,t)=\partial q/\partial X=f(\xi)$,代入到式(15)并积分可得

$$V^2(\dot{f}-\frac{h^2}{3}\dddot{f})-gh\dot{f}+1.5gh\dot{f}^2=K_1 \tag{16}$$

令 $u=\dot{f}$,得

$$V^2(u-\frac{h^2}{3}\ddot{u})-ghu+1.5ghu^2=K_1 \tag{17}$$

将式(17)左右两端同时乘上 $\dot{u}$ 再积分得

$$\dot{u}^2-3((V^2-gh)u^2-ghu^3+2K_1u+2K_2)/(hV)^2=0 \tag{18}$$

式中:$K_1$ 和 $K_2$ 为积分常数. 对于式(18),如将 $\dot{u}$ 与 $u^3$ 的项忽略,可得到线性理论波速 $c_0^2=gh$ 的结果. 继续推导可得

$$\dot{u}=\sqrt{\frac{3}{h^2}u^2-\frac{3g}{hV^2}u^2+\frac{3g}{hV^2}u^3-\frac{6K_1}{h^2V^2}u-\frac{6K_2}{h^2V^2}}=\frac{\sqrt{3gh}}{2hV}\sqrt{4u^3+4\alpha u^2+\beta u+\gamma} \tag{19}$$

式中:$\alpha=V^2/gh-1$;$\beta=-8K_1/gh$;$\gamma=-8K_2/gh$. 进行变换,令 $u=v-\alpha/3$,$\mu=\sqrt{\frac{4hc^2}{3g}}$可得

$$\mu\dot{v}=\sqrt{4v^3-g_2v-g_3} \tag{20}$$

式中:$g_2=-\beta+4\alpha^2/3$;$g_3=-8\alpha^3/27+\alpha\beta/3-\gamma$. 从而得到标准的 Weierstrass 椭圆函数解为

$$v=\wp(1/\mu(\xi-\xi_0)) \tag{21}$$

为便于分析处理,采用另一种表示形式. 回到式(19),设 $P(u)=4u^3+4\alpha u^2+\beta u+\gamma=4(v-c_1)(v-c_2)(v-c_3)$,讨论 $c_1$,$c_2$ 和 $c_3$ 为实数的情况(另一种情况为 2 个虚根 1 个实根,也有类似的变换). 设 $c_1>c_2>c_3$,进行变换,令 $u=c_3-(c_3-c_2)t^2$,$m_o^2=\frac{c_3-c_2}{c_3-c_1}$

则

$$4u^3+4\alpha u^2+\beta u+\gamma=4(c_3-c_2)^2(c_1-c_3)(1-t^2)(1-m_o^2t^2)t^2 \tag{22}$$

式(19)可以写为

$$\frac{\sqrt{c_1-c_3}}{\mu}\int\mathrm{d}\xi=\int^t\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-m_o^2\xi^2)}} \tag{23}$$

得

$$t=\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{c_1-c_3}}{\mu}(\xi-\xi_0),m_o\right) \tag{24}$$

故

$$u=c_2+(c_3-c_2)^2\mathrm{cn}^2(\frac{\sqrt{c_1-c_3}}{\mu}(\xi-\xi_0),m_o) \tag{25}$$

式(19)的椭圆余弦波解存在周期性. 方程 $P(u)=0$ 一般存在 3 个解 $c_1$,$c_2$ 和 $c_3$. 通过这 3 个解可以确定椭圆余弦波的模数 $m_o$、周期、函数曲线形状等特性. 利用精细积分法可以高效且高精度的计算二阶椭圆函数的值[9-10],因而可以方便地对浅水波方程进行数值分析与模拟.

当这 3 个根出现重根时,$m_o$ 会有 2 种蜕化,即 $m_o=0$ 和 $m_o=1$,其中 $m_o=1$ 最为关心,是出现孤子的条件.

孤波解要求当 $\xi\to\pm\infty$ 时 $u(\xi)\to 0$,故将式(18)中的积分常数取为 $K_1=K_2=0$. 此时方程 $P(u)=0$ 的 3 个根为 0,0 和 $-\alpha=1-V^2/gh$. 若 $\alpha>0$,则 $c_1=0$,$c_2=0$,$c_3=-\alpha$. 由 $m_o=1$,可得

$$u=-\frac{V^2-gh}{gh}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3V^2-3gh}}{2hV}(\xi-\xi_0)\right) \tag{26}$$

代入初始条件并进行适当变换可得

$$\begin{cases}\eta_D = \eta_0 \mathrm{sech}^2\left(\sqrt{3\eta_0/4h^2(h+\eta_0)}(X - Vt)\right)\\ V^2 = gh(1+\eta_0/h)\end{cases} \tag{27}$$

可以看出:式(27)与 KdV 方程得出的孤波解式(6)比较相似,只是在相同水深和波高的情况下 KdV 方程的孤波解的波速大于位移法所给出的波速.还应当指出,纯位移法提供过多的约束,从线性系统本征值的变分原理可知,纯位移约束总是使本征值单向提高,即结构的刚度提高.

## 3 位移法浅水波方程与传统 KdV 方程的差别

位移法浅水波方程和 KdV 方程都存在椭圆余弦波的周期解,而且也都导出孤波解,那么位移法方程与传统 KdV 方程在推导上存在什么不同,解又有什么差异呢?

首先,线性近似的结果是一致的,都支持水平速度沿高度不变的假定;其次,位移法考虑大变形.根据分析力学 Lagrange 体系的基本要求,运动学约束的不可压缩条件是严格满足的,然后根据变分原理导出动力方程.传统 KdV 方程是从速度势 $\varphi$ 的 Laplace 方程 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ \varphi)=0$,即散度为 0,进行 $\varphi$ 的小参数展开而推导的.零次项近似支持线性理论,一次项自动为 0,二次项导出 KdV 方程. $\mathrm{grad}\ \varphi = u$ 意味着速度严格保证无旋条件,但无旋条件是动力学的条件,意味着无切力.小参数展开意味着散度为 0 的条件是近似满足的,也就是说运动学条件被放松了.

于是,很明显 2 种推导的差别在于:位移法推导严格满足运动学(协调)条件,于是可运用分析结构力学,沿着变分原理的路子走,当然保辛[11-13];进一步对其非线性微分方程的积分可考虑保辛等基本要求,这是其重要的优点;传统 KdV 方程的推导则放松运动学条件,部分满足动力学条件,是否保辛尚需探讨.

既然位移法浅水波方程的推导和积分运算可以保辛,那么相对传统的 KdV 方程又存在什么优势?下面就通位移法浅水波方程与 KdV 方程的孤波行波解所存在的差异讨论 2 种方程的优缺点.

KdV 方程从产生至今已经有 120 多年的历史,虽然被广泛使用至今,但其孤波解存在 2 个主要不足:1)KdV 方程只有单向运动(向左或向右)的孤子解,而真实的孤波可以存在同时向 2 个方向传播的多孤波解;2)KdV 方程孤波解的波速比实际试验观测到的波速要大.

现在已经有很多方程可以用于描述同时向不同方向传播的孤波解,比如 Boussinesq 方程.位移法方程同样也可获取不同方向传播的孤波解,克服 KdV 方程的第一个不足之处,但很多浅水波方程的孤波解依然存在第二个问题.孤波的发现者 SCOTT 曾用重锤落入水槽的方法进行孤波的试验研究.他还从试验得出孤波移动速度 $V_o$ 与水槽中静止水深 $h$ 和孤波波幅 $\eta_0$ 之间存在如下关系[6]98-103

$$V_o^2 = gh(1+\eta_0/h) \tag{28}$$

这与本文的位移法浅水波的孤波解式(27)完全一致.从而,位移法浅水波方程也可克服 KdV 方程所存在的第二个不足之处,说明位移法浅水波方程的孤波解较其他方程存在理论优势.

## 4 结束语

运用 Lagrange 坐标将一维浅水波表达为固体力学的保守体系杆件纵向振动非线性问题.从而可用分析结构力学[11,13]的方法求解,Hamilton 体系保辛积分等许多手段便都可应用.在分析浅水波问题时并不遵循传统 Euler 坐标的浅水波分析途径,而是另辟蹊径,将分析力学、固体力学与流体力学有机结合,运用保守体系的分析特点,在物质坐标系下完成浅水波方程的推导.位移法浅水波方程和 KdV 浅水波方程都存在椭圆余弦波的周期解,可利用精细积分进行数值分析计算.2 种方程也都存在孤波解,且当波高远小于水深的情况下 2 种方程所给出的数值结果非常接近.在分析位移法浅水波方程与传统的 KdV 方程在推导上的差别之后,根据 2 种方程的孤波解的差异指出位移法浅水波方程的优势所在.

**参考文献:**

[1] COURANT R, FRIEDRICHS K O. Supersonic flow and shock waves[M]. New York: John Wiley & Sons, 1948.

[2] STOKER J J. Water waves[M]. New York: John Wiley & Sons, 1957.

[3] KINNMARK I. The shallow water wave equations: formulation, analysis and application[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[4] GARDNER C S, GREENE J M, KRUSKAL M D, *et al*. Method for solving the Korteweg-de Vries Equation[J]. Physic Review Letters, 1967, 19(19): 1095-1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.

[5] REMOISSENET M. Waves called solitons: Concepts and Experiments[M]. Berlin: Springer, 1996: 62-64.

(下转第 13 页)

(上接第 4 页)
[6] 倪皖荪，魏荣爵. 水槽中的孤波[M]. 上海：上海科技教育出版社，1997：7-8.
[7] 郭柏灵，庞小峰. 孤立子[M]. 北京：科学出版社，1987：5-25.
[8] 钟万勰，姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报，2006，46(1)：151-156.
ZHONG W X, YAO Z. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2006, 46(1): 151-156.
[9] 钟万勰，姚征. 椭圆函数的精细积分算法[C]//应用力学进展论文集. 北京：科学出版社，2004：106-111.
[10] 姚征，钟万勰. 椭圆函数的精细积分改进算法[J]. 数值计算与计算机应用，2008，29(4)：251-260.
YAO Z, ZHONG W X. The improved precise integration method for elliptic functions[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2008, 29(4): 251-260.
[11] 钟万勰. 分析结构力学与有限元[J]. 动力学与控制学报，2004，2(4)：1-8.
ZHONG W X. Analytical structural mechanics and finite element[J]. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(4): 1-8.
[12] 钟万勰，高强. WKBJ 近似保辛吗？[J]. 计算力学学报，2005，22(1)：1-7.
ZHONG W X, GAO Q. Is the WKBJ approximation symplectic conservative? [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22(1): 1-7.
[13] 钟万勰，高强，彭海军. 经典力学——辛讲[M]. 大连：大连理工大学出版社，2013.
(编辑　武晓英)